

Prima Prova Parziale di Matematica - tema B

per il corso di laurea in Biotecnologie

31 ottobre 2008

(1) Sia X un insieme non vuoto e siano A, B sottoinsiemi di X . Si verifichi che

$$A \subseteq B \quad \text{se e solo se} \quad (X \setminus A) \cup B = X.$$

(2) Si considerino i numeri di Fibonacci

$$a_0 = 0, a_1 = 1, \dots, a_k = a_{k-2} + a_{k-1} \text{ per ogni } k \in \mathbb{N}, k \geq 2.$$

Si dimostri per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, risulta

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = a_n a_{n+1}.$$

(3) Sia \mathbb{C} il corpo complesso e si consideri l'applicazione

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto z \bar{z}^2.$$

(a) Si determini l'insieme $I = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = \bar{z}\}$.

(b) Si determini l'insieme $f^*(\{1, -i, 2 + 2i\})$.

(c) Si discuta se f è biettiva, determinandone in caso affermativo l'inversa.

(4) Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\frac{x^2+1}{x^2}} - e}{\cos(\pi/2 - 1/x^2)}.$$

(5) Si consideri l'applicazione reale di variabile reale

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 1} - \arctan(1/x^2).$$

(a) Si determini il dominio di f e si discuta l'eventuale sua prolungabilità per continuità.

(b) Si determinino, se esistono, i limiti

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

(c) È vero che f si annulla in almeno un punto $x_0 > 0$?